Esame di geometria e algebra

Laurea Ing. — 17 Aprile 2015 — Traccia I

COGNOME NOME

(Q1)  Sia l’applicazione lineare definita da f(x,y,z,t) = (x y + z t,2y + 3t).

1. Determinare Im(f), una base e la dimensione
2. Determinare Ker(f), una base e la dimensione
3. Stabilire se f è surgettiva, ingettiva e bigettiva
4. Determinare una base e la dimensione di:

* W = L((1,0,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)),
* Ker(f)+W,
* Ker(f)W.
* Stabilire se R4 `e somma diretta di Ker(f) e W.

(Q2) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale h:

(Q3) Data la matrice ad elementi reali

stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice P che la diagonalizza.

(Q4) Nel piano cartesiano R(O, x, y), è data la famiglia di coniche

.

1. Determinare per quale valore del parametro reale a, si ha una conica degenere.
2. Posto a = 1, classificare la conica corrispondente.
3. Calcolare la sua equazione canonica.

(Q5) Fissato nello spazio un riferimento metrico R(O, x, y, z):

1. Calcolare le equazioni della retta s passante per O(0,0,0), parallela al piano di equazione

e incidente la retta r:

1. Determinare le coordinate del punto P di intersezione di r ed s e l’equazione del piano che le contiene.
2. Calcolare l’angolo formato dalle rette r ed s.
3. Calcolare la distanza del punto Q(1,1,0) dal piano .

(Q6) Dare la definizione di applicazione lineare.

(Q7) Data l’applicazione lineare , dimostrare che Im(f) = f(V) è un sottospazio vettoriale di V’.

Soluzione

(Q4) Consideriamo .

1. Le matrici associate alla conica sono

La conica è degenere se

1. Per a = 1, si ottiene la conica non degenere il cui invariante cubico è

Poiché la conica è un’iperbole non degenere.

1. Calcoliamo la sua equazione canonica con il metodo degli invarianti.

Gli autovalori di A00 sono:

Quindi, l’equazione canonica è

La matrice completa associata a tale equazione è

e il suo invariante cubico è

Imponiamo che

Quindi, l’equazione canonica della conica è

(Q5)

1. Sia P il punto in cui la retta s incide la retta r:

.

Quindi, l’equazione della retta s è del tipo (*retta per due punti*)

e i suoi parametri direttori sono

Ora imponiamo che sia parallela al piano .

Quindi, la retta s ha equazioni .

1. Il punto P ha coordinate (1,0,2).

Il piano contenente le rette s ed r è il piano per P(1,0,2), parallelo ad s ed r.

I vettori direttori di s ed r sono rispettivamente

quindi, le equazioni parametriche del piano sono

Calcoliamo l’equazione cartesiana:

1. Il piano . La distanza del punto Q(1,1,0) dal piano è